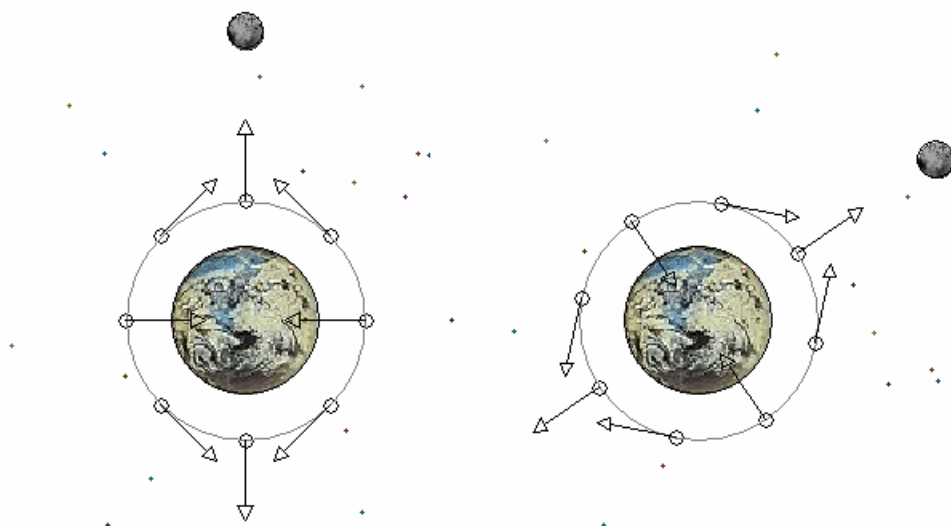


Санкт-Петербургский государственный университет
Физический факультет

Бутиков Е. И.

ФИЗИКА ОКЕАНСКИХ ПРИЛИВОВ В КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЯХ

*Учебное пособие и методические материалы
к комплексу моделирующих программ*



Санкт-Петербург

2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	2
Приливообразующие силы: элементарное описание	3
Вертикальные и горизонтальные составляющие приливных сил.....	6
Статическая деформация поверхности мирового океана	8
Приливообразующие силы на вращающейся Земле.....	9
Динамическая теория приливов	11
За рамками модели – сложности реальной картины	14
Эволюция движений небесных тел под действием приливного трения	15
Литература	16

Введение

У берегов морей и океанов вода дважды в сутки поднимается до некоторого максимального уровня и дважды в сутки опускается до минимального уровня. Промежуток времени между следующими друг за другом приливами (или отливами) составляет 12 часов 25 минут. За это время Луна в своем видимом суточном движении совершает половину оборота вокруг Земли. Поэтому уже с давних времен причину приливов и отливов связывали с тяготением Луны. Первое научное объяснение приливов было дано Ньютоном.

Почти все учебники по общей физике и теоретической механике, как и по астрономии, приводят океанские приливы в качестве интересного примера проявления всемирного тяготения. Статьи методического характера, появляющиеся время от времени в периодической печати (см. [1] и приведенную там литературу), свидетельствуют о том, что педагоги по-прежнему интересуются вечной темой океанских приливов, но не удовлетворены ясностью и корректностью общепринятых объяснений физических причин этого замечательного космического явления. Анализ учебников и педагогической литературы (в том числе многочисленных публикаций на эту тему в сети Интернет) показывает, что многие важные аспекты происхождения приливов и их свойств часто трактуются неточно и даже ошибочно (см. например [2]). Множество недоразумений и неточностей в приводимых в учебной литературе объяснениях связано с ролью орбитальных движений Луны и Земли вокруг общего центра масс и осевого суточного вращения Земли в возникновении приливов. Во многих случаях неправильно трактуется вклад центробежных сил инерции в происхождение приливообразующих сил.

Физически корректное толкование приливных явлений не должно ограничиваться картиной приливообразующих сил и вызываемой ими статической деформации водной оболочки Земли. Правильная теория приливов должна быть *динамической*, т.е. учитывающей реакцию океана как динамической колебательной системы (способной совершать собственные колебания) на приливные силы, периодически зависящие от времени. Авторы, пишущие о приливах, обычно объясняют (более или менее убедительно), почему гравитационные силы приводят к появлению двух приливных «вздутий» покрывающей Землю водной оболочки, расположенных на противоположных сторонах земного шара. Но почти невозможно встретить в литературе правильное объяснение физического механизма, ответственного за фазовый сдвиг между кульминациями Луны и максимальными уровнями прилива. Наблюдения показывают, что в некоторых местах Земли этот сдвиг приближается к 90 градусам. Часто встречаются также недоразу-

нения в объяснении роли приливного трения в замедлении осевых вращений и в эволюции орбитальных движений небесных тел, связанных гравитационным взаимодействием.

Чтобы максимально прояснить физические основы приливных явлений, в этом учебном пособии мы предлагаем весьма простое, но вполне строгое описание приливообразующих сил. Затем предлагается теоретический расчет производимой этими силами приливной волны, циркулирующей вокруг земного шара. При этом используются упрощенные модели мирового океана в виде сплошной водной оболочки, полностью покрывающей всю Землю слоем постоянной глубины, или заполненного водой канала, опоясывающего земной шар по экватору. Для пояснения теоретических построений автором этого пособия разработана моделирующая компьютерная программа, дающая наглядную динамическую картину приливных сил и вызываемой этими силами стационарной приливной волны в открытом океане. Упрощенная версия программы в виде интерактивных Java-апплетов (с необходимыми краткими пояснениями) [3] доступна также в сети Интернет по адресу www.ifmo.ru/butikov/Projects/TidesR0.html. Подчеркнем, что данное пособие и связанная с ним моделирующая программа нацелены на максимально простое объяснение физических принципов, но не претендуют на исчерпывающее описание приливных явлений. Теоретическое количественное описание приливов на Земле на основе первых принципов едва ли возможно из-за сложной структуры береговой линии и рельефа дна мирового океана, т.е. из-за чрезвычайной сложности реальной динамической системы, реакция которой на хорошо известные приливные силы и проявляется в природе как приливные колебания уровня моря у берегов и приливные течения.

Пособие организовано следующим образом. Сначала приводится качественная картина физического происхождения приливных сил на Земле, порождаемых тяготением Солнца и Луны. При этом используется неинерциальная система отсчета, связанная с Землей, но не участвующая в суточном вращении Земли вокруг собственной оси (не вращающаяся геоцентрическая система отсчета). Затем обсуждается статическая (равновесная) деформация поверхности океана под действием приливных сил. Далее мы показываем, что полученные выражения для приливной силы в произвольной точке земной поверхности справедливы и при учете осевого вращения Земли, и обсуждаем характер зависимости приливных сил от времени на вращающейся Земле. Показано, что равномерное вращение системы приливных сил, конфигурация которой привязана к видимому с вращающейся Земли положению приливообразующего тела (Луны или Солнца), может быть представлено как суперпозиция двух квадрупольных систем осциллирующих сил. Оси симметрии этих систем осциллирующих сил неподвижны относительно Земли и образуют угол 45 градусов одна с другой. Каждая из двух систем осциллирующих сил порождает вынужденное колебание океана в виде стоячей волны, в которой поверхность воды принимает эллипсоидальную форму. Приливную волну, циркулирующую вокруг Земли, можно трактовать как суперпозицию этих стоячих волн. Затем мы обсуждаем кратко сложности наблюдаемой картины приливов, связанные с отличием реальной системы от принятой упрощенной модели, а также роль приливного трения в эволюции осевых вращений и орбитальных движений небесных тел.

Приливообразующие силы: элементарное описание

В дальнейшем мы разделяем задачу объяснения приливов на две части: сначала мы обсуждаем происхождение и свойства приливообразующих сил, и лишь затем приступаем к значительно более сложному вопросу воздействия этих зависящих от времени сил на мировой океан, т.е. рассматриваем вынуждаемые приливными силами колебания океана как динамической системы, которая может совершать собственные колебания. Отметим, что в литературе встречается немало недоразумений даже в связи с

первой (сравнительно простой) частью задачи, которая может быть исчерпывающим образом решена в рамках ньютоновской механики и теории тяготения.

Вблизи берегов океанские приливы и отливы проявляются как чередующиеся подъемы и опускания уровня воды, сопровождающиеся горизонтальными перемещениями водных масс, которые называют приливными течениями. Хорошо известно, что приливы вызываются изменяющимися со временем силами тяготения Луны и Солнца, которые действуют на земной шар и покрывающие его воды морей и океанов.

Земля как целое движется с ускорением по отношению к инерциальной (гелиоцентрической) системе отсчета. Это ускорение создается главным образом гравитационным притяжением Земли к Солнцу и в значительно меньшей степени притяжением к Луне (а также и ко всем другим небесным телам). Если бы поля тяготения, создаваемые на Земле всеми небесными телами, были строго однородными, то точно такое же ускорение они сообщали бы и всем находящимся на Земле телам, и никаких приливов мы бы не наблюдали. Поэтому истинная причина приливных явлений связана с *неоднородностью* полей тяготения Луны и Солнца, т.е. с изменениями этих полей на протяжении земного шара.

Сила притяжения к Луне, действующая на любое находящееся на Земле тело, значительно меньше силы притяжения к Солнцу. Но Луна гораздо ближе к Земле, чем Солнце, и поэтому на Земле неоднородность поля тяготения Луны выражена намного сильнее, чем неоднородность поля тяготения Солнца. В результате оказывается, что лунные приливообразующие силы более чем в два раза превосходят солнечные. Тем не менее мы начнем анализ на примере Солнца, забыв на время о существовании Луны, так как в этом случае несколько проще подойти к пониманию происхождения приливообразующих сил. Некоторые упрощения связаны с тем, что центр масс системы Земля – Солнце почти точно совпадает с центром Солнца.

Земля движется вокруг Солнца по почти круговой орбите. Центробежное ускорение \mathbf{a}_0 Земли в этом движении создается гравитационным притяжением к Солнцу, т.е. по существу \mathbf{a}_0 – это ускорение свободного падения Земли на Солнце. Это ускорение не зависит от орбитального движения Земли: оно было бы точно таким же, если бы Земля вместо движения по орбите просто свободно падала на Солнце. Важно сознавать, что в вопросе происхождения приливов имеет значение только ускорение Земли, а скорость ее орбитального движения не играет никакой роли.

Для объяснения поведения тел на Земле, в том числе поведения воды в океане, удобно рассматривать их движение в связанной с Землей (геоцентрической) неинерциальной системе отсчета. Сначала будем использовать *не вращающуюся* геоцентрическую систему отсчета. Хотя начало координат такой системы движется по окружности вокруг Солнца (точнее, вокруг центра масс системы Солнце – Земля), сама система не вращается, так как направления осей координат неизменны по отношению к удаленным звездам. Иначе говоря, эта система, подобно сковороде в руках повара, совершает поступательное круговое движение, потому что все ее точки описывают одинаковые окружности при сохранении ориентации осей координат. По отношению к инерциальному пространству все точки такой системы отсчета движутся с одним и тем же ускорением \mathbf{a}_0 . Это значит, что на любое тело массы m (например, спутник Земли или каплю воды в океане) в этой системе действует сила инерции $\mathbf{F}_{in} = -m\mathbf{a}_0$, величина и направление которой не зависят от положения тела на Земле. Если бы тело находилось точно в центре Земли, эта сила инерции в точности уравновешивала бы силу притяжения тела к Солнцу. Другими словами, мы можем рассматривать Землю как гигантский космический корабль, совершающий орбитальный полет вокруг Солнца (т.е. свободно падающий на Солнце). Тогда можно сказать, что любое тело в центре этого корабля находится в состоянии невесомости по отношению к солнечному тяготению, подобно тому, как

космонавты на орбитальной станции находятся в невесомости по отношению к земному тяготению.

Теперь время вспомнить о том, что действующая на любое тело сила \mathbf{F}_{Sun} притяжения к Солнцу всегда направлена к центру Солнца, а ее величина обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Солнца. Если тело не находится в центре Земли, то сила \mathbf{F}_{Sun} притяжения к Солнцу, зависящая от положения тела, и всюду одинаковая сила инерции $\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\mathbf{a}_0$ уже не будут полностью уравновешивать друг друга. Из-за конечных размеров Земли эти две силы в любом месте на Земле не будут в точности равны по величине и противоположны по направлению, за исключением центра Земли. Совместное действие этих сил и называют *приливной* (или *приливообразующей*) силой.

Иными словами, в любом месте на Земле или вблизи Земли приливная сила – это векторная разность силы гравитационного притяжения тела к Солнцу в данном месте и силы притяжения к Солнцу, которую это тело испытывало бы, будучи помещенным в центр Земли. Пользуясь таким языком, при выводе выражений для приливных сил можно обойтись без использования неинерциальных систем отсчета и сил инерции: вместо векторного сложения силы притяжения к Солнцу и силы инерции в неинерциальной системе можно говорить о вычитании силы притяжения к Солнцу в данном месте и в центре Земли. Рассматривая ситуацию на Земле «со стороны», из гелиоцентрической инерциальной системы отсчета, мы можем сослаться на обобщенный закон Галилея, согласно которому в одном и том же поле тяготения (в данном случае в поле тяготения Солнца) все тела падают с одинаковыми ускорениями. Земля в целом и все свободные тела на Земле приобретают под действием Солнца почти одинаковые ускорения. Именно потому здесь на Земле мы не особенно ощущаем вмешательство солнечного тяготения в наши земные дела. Малые различия между ускорением Земли как целого и земных тел возрастают при увеличении расстояний, на которых находятся тела от центра Земли, поскольку эти различия вызваны неоднородностью поля тяготения Солнца на протяжении земного шара.

Эти дифференциальные эффекты гравитации Солнца вызывают, в частности, малые возмущения геоцентрических околоземных орбит спутников: после совершения очередного витка спутник уже не возвращается в исходную точку геоцентрической системы отсчета. На поверхности земли эти же дифференциальные эффекты приводят к возникновению океанских приливов. Подчеркнем, что происхождение приливных сил обусловлено не самим по себе полем тяготения Солнца, а *неоднородностью* этого поля.

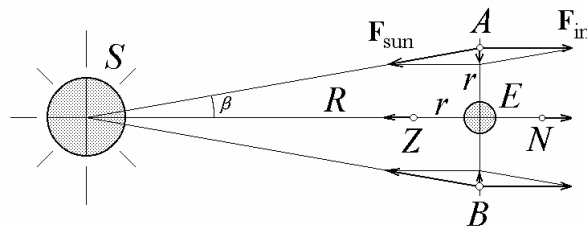


Рис. 1. К происхождению приливных сил вблизи Земли в неоднородном поле солнечного тяготения.

Рисунок 1 схематически иллюстрирует происхождение и свойства приливообразующих сил, вызванных Солнцем. Ускорение свободного падения Земли E в поле тяготения Солнца S равно $a_0 = GM_{\text{Sun}}/R^2$, где M_{Sun} – масса Солнца, а R – расстояние между центрами Земли и Солнца. Сила притяжения \mathbf{F}_{Sun} к Солнцу некоторого тела (например, спутника Земли), находящегося в точке A , почти равна силе инерции \mathbf{F}_{in} по величине, потому что расстояния от центра Солнца до тела и до центра Земли почти одинаковы. Однако в точке A направление силы \mathbf{F}_{Sun} не в точности противоположно направлению силы инерции $\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\mathbf{a}_0$. Поэтому результирующая этих сил, т.е. приливная сила \mathbf{F}_A в

точке A , отлична от нуля и направлена к центру Земли. Как видно из рисунка, ее величина равна $ma_0\beta$, где $\beta = r/R$ – угол между направлениями на тело и на центр Земли из центра Солнца. Подставляя сюда $a_0 = GM_{\text{Sun}}/R^2$, для приливной силы в точке A получаем:

$$F_A = G \frac{mM_{\text{Sun}}}{R^2} \frac{r}{R}. \quad (1)$$

Приливная сила \mathbf{F}_B в противоположной точке B равна \mathbf{F}_A по величине, но направлена противоположно, т.е. тоже вертикально вниз. На поверхности Земли приливная сила направлена вертикально вниз во всех точках, для которых Солнце в данный момент находится на горизонте.

Если тело находится в точке Z (для которой Солнце оказывается в зените), расстояние от тела до центра Солнца меньше, чем от центра Земли. Здесь сила тяготения Солнца в точности противоположна силе инерции, но имеет несколько большую величину. Поэтому приливная сила \mathbf{F}_Z в точке Z направлена вертикально вверх, от Земли к Солнцу. Ее величина дается соответствующей разностью:

$$F_Z = G \frac{mM_{\text{Sun}}}{(R-r)^2} - ma_0 = ma_0 \left[\frac{R^2}{(R-r)^2} - 1 \right] \approx ma_0 \frac{2r}{R} = G \frac{mM_{\text{Sun}}}{R^2} \frac{2r}{R}. \quad (2)$$

Как видно из этой формулы, в точке Z приливная сила примерно вдвое больше, чем в точках A и B . Аналогично, в противоположной точке N (для которой Солнце находится в надире) сила инерции несколько больше силы тяготения Солнца, так что приливная сила \mathbf{F}_N в точке N направлена от Солнца, т.е. также направлена вертикально вверх по отношению к поверхности Земли. По величине \mathbf{F}_N приблизительно совпадает с \mathbf{F}_Z .

Вертикальные и горизонтальные составляющие приливных сил

Во всех рассмотренных выше четырех точках приливные силы имеют вертикальные направления. Оказывается, что в промежуточных точках приливные силы имеют горизонтальные составляющие (рис. 2). Именно горизонтальные составляющие играют наиболее важную роль в образовании приливов. Как видно из рисунков 1 и 2, система приливных сил стремится растянуть Землю (и покрывающую ее водную оболочку) вдоль линии Солнце – Земля и сжать Землю в поперечном направлении.

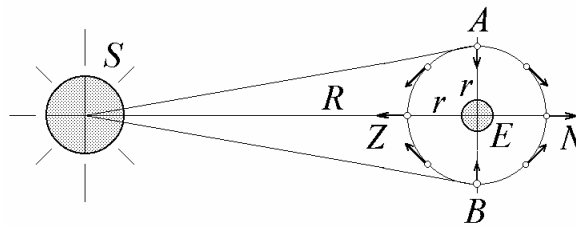


Рис. 2. Приливные силы в разных точках вблизи Земли в неоднородном поле солнечного тяготения.

Чтобы найти величину и направление приливной силы в произвольном месте вблизи Земли, положение которого задается расстоянием r от центра Земли и углом θ с направлением Солнце – Земля (рис. 3), необходимы более громоздкие вычисления. Детали расчета приливных сил можно найти в статье [1]. Здесь мы приведем лишь окончательные результаты. Горизонтальная составляющая приливной силы в произвольном месте дается следующим выражением:

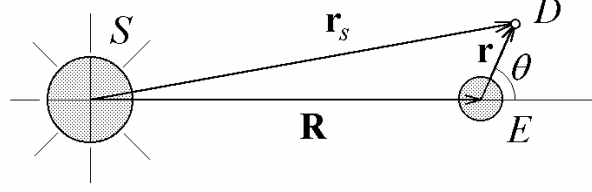


Рис. 3. Переменные r и θ , используемые для указания положения произвольной точки вблизи Земли.

$$F_{\text{hor}} = -3G \frac{mM_{\text{Sun}}}{R^3} r \cos \theta \sin \theta = -\frac{3}{2} F_{\text{Sun}} \frac{r}{R} \sin 2\theta, \quad (3)$$

где $F_{\text{Sun}} = GmM_{\text{Sun}}/R^2$ – это гравитационная сила, с которой Солнце действует на рассматриваемое тело. Горизонтальная составляющая приливной силы равна нулю в точках A и B , как и во всех других точках плоскости, ортогональной линии Солнце – Земля, для которых $\theta = 90^\circ$. Она обращается в нуль также в точках N и Z , для которых $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$. Горизонтальная составляющая имеет максимальное значение $(3/2)(r/R)F_{\text{Sun}} = (3/2)(r/R)GmM_{\text{Sun}}/R^2$ во всех точках вблизи земной поверхности, для которых $\theta = 45^\circ$ и $\theta = 135^\circ$. Эта горизонтальная составляющая солнечной приливной силы вызывает отклонение отвеса от направления земной силы тяготения на ничтожно малый угол, равный всего лишь $0.008''$.

Вертикальная составляющая приливной силы в произвольном месте вблизи Земли может быть рассчитана по формуле:

$$F_{\text{vert}} = G \frac{mM_{\text{Sun}}}{R^3} r(3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{3}{2} F_{\text{Sun}} \frac{r}{R} \left(\cos 2\theta + \frac{1}{3} \right). \quad (4)$$

Для точек A и B ($\theta = 90^\circ$) формула (4) дает то же значение, что и формула (1). Для точек N и Z , в которых $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$ выражение (4) дает то же значение, что и формула (2). Последний член в правой части выражения (4) не зависит от θ , т.е. всюду одинаков (при данном r), и потому он остается постоянным даже при учете суточного вращения Земли. Это значит, что к происхождению приливов он не имеет отношения, и в формуле (4) его можно опустить (такой член можно рассматривать как крошечную – примерно в одну десятимиллионную долю mg – постоянную добавку к вертикальной силе земного тяготения). Таким образом, для вертикальной и горизонтальной составляющих приливной силы можно принять следующие выражения:

$$F_{\text{vert}} = \frac{3}{2} F_{\text{Sun}} \frac{r}{R} \cos 2\theta, \quad F_{\text{hor}} = -\frac{3}{2} F_{\text{Sun}} \frac{r}{R} \sin 2\theta. \quad (5)$$

Согласно выражениям (5), приливная сила представляет собой вектор, модуль которого $(3/2)(r/R)F_{\text{Sun}} = (3/2)GmM_{\text{Sun}}r/R^3$ не зависит от угла θ : приливные силы во всех точках, лежащих на одинаковых расстояниях от центра Земли, одинаковы по модулю и отличаются только направлениями.

Выражения (1) – (4) для создаваемых Солнцем приливных сил справедливы и для приливных сил, создаваемых Луной, если заменить в них M_{Sun} массой Луны, а под R понимать расстояние между центрами Луны и Земли. Сохраняют свою силу и выражения (5), если заменить в них F_{Sun} действующей на тело силой лунного притяжения. Не существует никакой принципиальной разницы между приливообразующими силами, создаваемыми Солнцем и Луной. И в том, и в другом случае для возникновения приливов важен лишь один фактор – ускорение Земли под действием тяготения небесного тела, вызывающего приливы. При этом никакой роли не играют орбитальные скорости взаимного обращения рассматриваемых небесных тел, связанных гравитационными силами. В системе Земля – Солнце это скорость Земли на круговой орбите вокруг Солнца (ускорение Земли в этом движении обусловлено притяжением Солнца), в системе Зем-

ля – Луна это скорость центра Земли при ее движении по малой окружности вокруг центра масс всей системы. Этот центр масс лежит внутри самой Земли. В последнем случае для образования приливов также существенно лишь ускорение Земли, создаваемое лунным тяготением, а не скорость кругового движения центра Земли.

Приливная сила, действующая на любое тело, прямо пропорциональна расстоянию r , на которое это тело удалено от центра Земли, и обратно пропорциональна третьей степени расстояния R до небесного тела, вызывающего приливы. Разумеется, приливная сила пропорциональна также массе небесного тела – источника приливных сил. Как уже отмечалось, лунные приливообразующие силы на Земле более чем вдвое превосходят солнечные, потому что Луна находится значительно ближе к Земле, нежели Солнце.

Лунная приливообразующая сила $F_{\text{tidal}} = (3/2)GmM_{\text{Moon}}r_0/R^3$, действующая на тело массы m на поверхности Земли (здесь r_0 – радиус Земли), очень мала по сравнению с весом этого тела, т.е. с силой притяжения к Земле $F_{\text{grav}} = mg = GmM_{\text{Earth}}/r_0^2$. Если положить отношение масс $M_{\text{Moon}}/M_{\text{Earth}} = 1/81$, а для среднего расстояния между центрами Земли и Луны принять $R = 60r_0$ (в действительности это расстояние изменяется в пределах от $57r_0$ до $63.7r_0$ из-за эллиптичности орбиты Луны), получим следующую оценку приливообразующей силы:

$$\frac{F_{\text{tidal}}}{F_{\text{grav}}} = \frac{3}{2} \frac{M_{\text{Moon}}}{M_{\text{Earth}}} \frac{r_0^3}{R^3} \approx 8.6 \cdot 10^{-8}. \quad (6)$$

Несмотря на то, что на поверхности Земли лунная приливообразующая сила составляет примерно всего лишь одну десятимиллионную (10^{-7}) часть силы земного тяготения, ее влияние на океанские воды может быть значительным благодаря горизонтальной составляющей, которая ортогональна к силе земного тяготения и периодически изменяется из-за суточного вращения Земли. Именно горизонтальные составляющие приливных сил вызывают перемещения океанских вод вдоль земной поверхности.

Статическая деформация поверхности мирового океана

Рассмотрим гипотетическую ситуацию планеты, которая не имеет осевого вращения, и потому на ней приливообразующие силы практически не зависят от времени. Из симметрии приливообразующих сил, выражаемых формулами (5), следует, что покрывающая сферическую планету водная оболочка испытывает статическое искажение, принимая форму эллипсоида вращения:

$$r(\theta) = r_0 + a \cos 2\theta. \quad (7)$$

Здесь $2a \ll r_0$ – разность между максимальным и минимальным уровнями воды в точках Z и A (см. рис. 1). В соответствии с уравнением (7), поверхность воды образует следующий угол с горизонтом:

$$\alpha = \frac{1}{r} \frac{dr(\theta)}{d\theta} \approx -\frac{2a}{r_0} \sin 2\theta. \quad (8)$$

Отсюда следует, что поверхность воды горизонтальна (т.е. $\alpha = 0$) при $\theta = 0$ и при $\theta = 90^\circ$ (в точках Z и A). Угол α максимален и равен $2a/r_0$ при $\theta = 45^\circ$ и при $\theta = 135^\circ$, где приливная сила имеет горизонтальное направление. В состоянии равновесия искаженная приливными силами водная поверхность перпендикулярна линии отвеса. Линия отвеса направлена вдоль векторной суммы силы земного тяготения и приливной силы. Малое отклонение линии отвеса от направления земной тяжести (от направления на центр Земли) вызвано горизонтальной составляющей приливной силы. Поэтому угол α равен отношению F_{hor} к $F_{\text{grav}} = mg$. Приравнявая $\alpha = 2a/r_0$ при $\theta = 45^\circ$ к $F_{\text{hor}}/F_{\text{grav}}$ и принимая во внимание, что $F_{\text{hor}}/mg = (3/2)(M_{\text{Sun}}/M_{\text{Earth}})(r_0^3/R^3)$, получаем для статической разности уровней $2a$ в точках Z и A под действием солнечных приливообразующих сил:

$$2a = \frac{3}{2} r_0 \frac{M_{\text{Sun}}}{M_{\text{Earth}}} \frac{r_0^3}{R^3}. \quad (9)$$

Выражение (9) дает $2a = 0.24$ м. Аналогичное выражение, в котором M_{Sun} заменено на M_{moon} , справедливо и для статического искажения поверхности океана под действием лунных приливообразующих сил. Для максимальной статической разности уровней оно дает значение $2a = 0.54$ м.

Приливообразующие силы на вращающейся Земле

В приведенных выше рассуждениях использовалась связанная с Землей не вращающаяся система отсчета, совершающая вместе с Землей поступательное круговое движение вокруг общего центра масс при сохранении направления осей относительно инерциального пространства. Такая система отсчета удобна для анализа движения искусственных спутников Земли. В этой системе спутник движется по замкнутой эллиптической орбите, если пренебречь влиянием приливообразующих сил. Приливные силы вызывают лишь слабые возмущения орбиты спутника.

Однако для описания приливов нужно воспользоваться геоцентрической системой отсчета, участвующей в суточном вращении Земли вокруг своей оси. У такой системы, в отличие от движущейся поступательно, ускорение в разных точках разное. Сложное движение Земли (и жестко связанной с ней системы отсчета) можно представить в виде двух простых составляющих движений. Первое – это рассмотренное выше круговое поступательное движение относительно центра масс системы Солнце – Земля (или Луна – Земля) без осевого вращения. Второе движение – это равномерное суточное вращение Земли относительно собственной оси, проходящей через центр Земли.

В задаче о приливах важны оба движения, но они играют совершенно различные роли. Ускорение \mathbf{a}_0 , связанное с поступательным движением, ответственно за происхождение действующей на все земные тела силы инерции $\mathbf{F}_{\text{in}} = -m\mathbf{a}_0$, которая не зависит от положения тела на Земле. Совместное действие этой силы инерции и неоднородной силы притяжения данного тела приливообразующим небесным телом (Солнцем или Луной) описывается рассмотренной выше приливообразующей силой. Приливообразующие силы в разных точках образуют квадрупольную систему, ось симметрии которой ориентирована вдоль линии, соединяющей Землю и небесное тело, которое сообщает Земле ускорение \mathbf{a}_0 .

Участвуя в суточном вращении Земли, разные ее точки имеют центростремительные ускорения. Из-за этих ускорений возникают центробежные силы инерции, величина которых растет пропорционально удалению от оси вращения. Вызываемые осевым вращением Земли центробежные силы инерции значительно больше приливных сил. Благодаря центробежным силам равновесная форма Земли (и покрывающего ее океана) немного отличается от идеального шара – это приблизительно эллипсоид вращения, экваториальный диаметр которого немного больше полярного диаметра.

Но к задаче о приливах это постоянное искажение формы Земли (и океана) не имеет никакого отношения, потому что оно совершенно не зависит от видимого положения небесного тела, вызывающего приливы (Солнца или Луны). Связанное с суточным вращением Земли центростремительное ускорение (в противоположность ускорению \mathbf{a}_0 в поступательном движении Земли) ничего не добавляет к приливным силам. Однако суточное вращение Земли приводит к тому, что вся система приливных сил вращается как целое относительно Земли, поскольку ось симметрии системы приливообразующих сил привязана к кажущемуся положению светила – источника приливных сил. Реакция мирового океана как динамической системы на эти зависящие от времени силы и составляет сущность явления приливов.

Для простоты будем рассматривать случай, когда вызывающее приливы небесное тело (Солнце или Луна) находится в экваториальной плоскости Земли. Для земного наблюдателя система приливообразующих сил вращается как целое с угловой скоростью Ω осевого вращения Земли, следуя за изменяющимся на протяжении суток видимым положением источника. Суточное вращение картины приливообразующих сил иллюстрирует приводимый здесь рисунок 4 и компьютерная программа из разработанного автором цикла Java-апплетов «Океанские приливы», который можно найти в сети по адресу www.ifmo.ru/butikov/TidesR0.html.

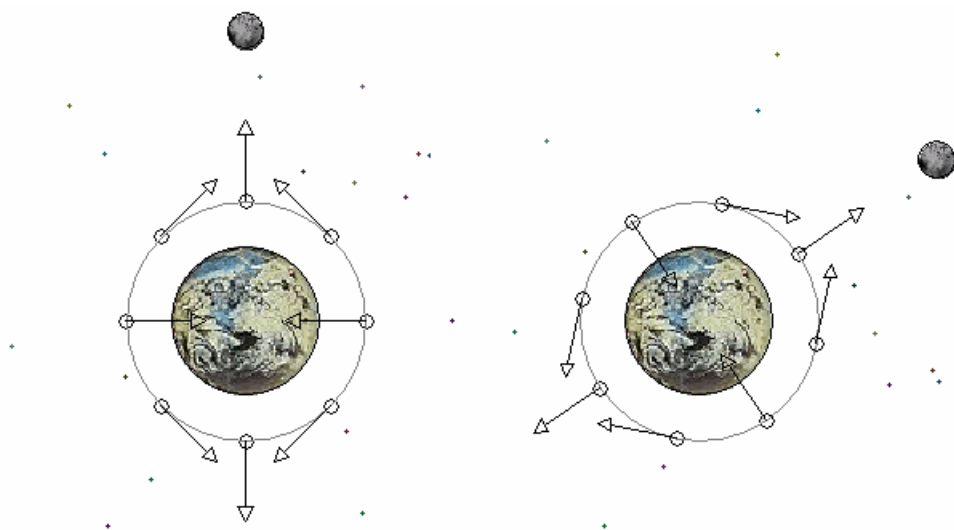


Рис. 4. Вращение системы приливообразующих сил вслед за видимым положением Луны.

Хотя система приливообразующих сил вращается как целое с угловой скоростью Ω осевого вращения Земли, т.е. с периодом $2\pi/\Omega$, истинный период изменения приливообразующих сил в экваториальной плоскости Земли вдвое меньше ($T = \pi/\Omega$) из-за квадрупольной симметрии системы сил (полусуточный прилив). Для солнечных приливов этот период равен 12 часам, для лунных он составляет 12 ч. 25 мин. Разница в периодах солнечных и лунных приливов связана с орбитальным движением Луны.

В произвольной фиксированной точке экватора Земли приливообразующая сила представляет собой *вращающийся вектор*. Вектор приливной силы равномерно вращается в вертикальной плоскости, совершая *два* полных оборота за то время, пока приливообразующее небесное тело (Луна или Солнце) совершит *один* оборот видимого движения вокруг Земли. Иначе говоря, угловая скорость вращения вектора приливной силы вдвое превосходит угловую скорость видимого движения светила (угловую скорость осевого вращения Земли). Наглядное представление о поведении приливных сил в фиксированных точках дает компьютерная программа и (в значительно меньшей степени) рис. 5. Векторы приливных сил в диаметрально противоположных точках экватора направлены противоположно, т.е. совершают вращение в противофазе.

В каждом месте экваториальной плоскости дважды в сутки приливная сила направлена вертикально вверх: в моменты, когда Луна (или Солнце) оказывается для данной точки в зените и в надире. Также дважды в сутки приливная сила направлена вертикально вниз. Это случается в моменты, когда Луна (или Солнце) оказывается для данной точки Земли на линии горизонта.

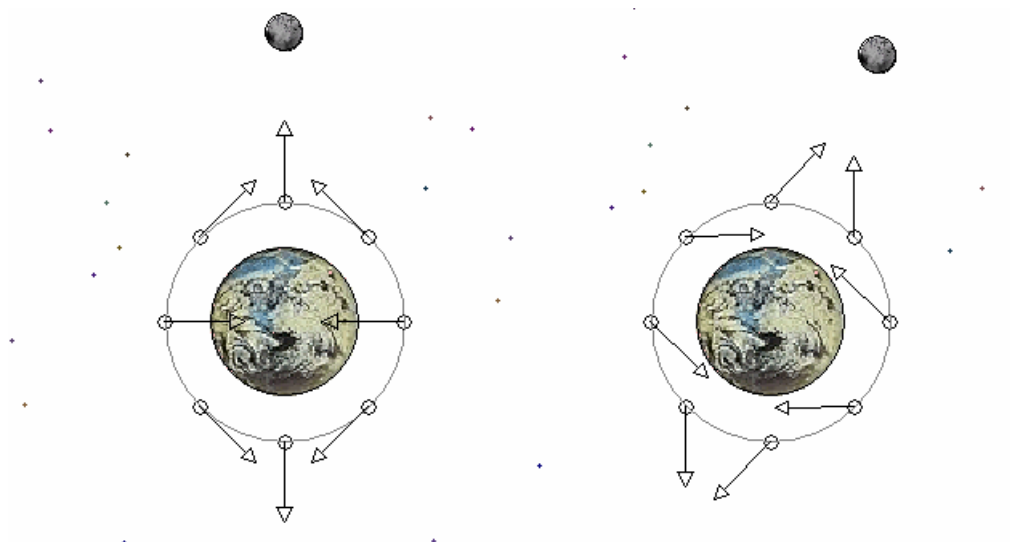


Рис. 5. Вращение векторов приливообразующих сил в фиксированных точках экваториальной плоскости.

Аналитические выражения для зависимости приливных сил от времени в данном месте экваториальной плоскости на вращающейся Земле можно получить, подставляя $\theta = \Omega t$ в уравнения (5). Для точки экватора, в которой Солнце проходит через зенит при $t = 0$, получаем:

$$F_{\text{vert}}(t) = A \cos 2\Omega t, \quad F_{\text{hor}}(t) = A \sin 2\Omega t, \quad (10)$$

где $A = (3/2)F_{\text{Sun}}/R = (3/2)GmM_{\text{Sun}}/R^3$. В любой другой точке на экваторе Земли вектор приливной силы также вращается в вертикальной плоскости с угловой скоростью 2Ω . Таким образом, все эти векторы вращаются синхронно, но с различными фазами.

Формулы (10) показывают, что в каждой точке экватора вращающийся вектор приливообразующей силы можно рассматривать как суперпозицию двух сил неизменных направлений (вертикальной и горизонтальной), осциллирующих с частотой 2Ω со сдвигом по фазе на четверть периода. Вся вращающаяся система приливообразующих сил может быть представлена как две квадрупольные системы осциллирующих сил, оси которых образуют одна с другой угол $\pi/4$. Цитированная выше компьютерная программа «Океанские приливы» дает наглядную динамическую картину такого представления приливообразующих сил.

Динамическая теория приливов

После того, как установлены основные закономерности приливообразующих сил, следует рассмотреть реакцию мирового океана на действие этих сил. В учебной и научно-популярной литературе о приливах этот вопрос трактуется чрезмерно упрощенно. А именно, вслед за Ньютоном и Бернулли, большинство авторов полагают, что под действием приливообразующих сил поверхность океана принимает равновесную форму эллипсоида вращения, вытянутого вдоль линии Земля – Солнце (или Земля – Луна для лунных приливов). В соответствии с таким предположением высокий уровень воды в некотором месте должен наблюдаться всякий раз когда Луна находится в верхней и нижней кульминациях (в зените и надире), а низкий уровень – в промежутках между этими моментами, когда Луна в данном месте находится на горизонте. Однако наблюдения не согласуются с таким выводом. Скорее справедлива обратная закономерность: кульминациям Луны соответствует низкий уровень. Во всяком случае, между кульминацией Луны и последующей высокой водой проходит промежуток времени в несколько часов. Объяснить это можно только в рамках динамической теории приливов, впервые предложенной Лапласом и развитой Эйри, в которой рассматривается вынужден-

ное движение покрывающей Землю воды под действием известных зависящих от времени приливообразующих сил.

Динамическая теория приливов рассматривает мировой океан как динамическую систему, в которой возможны собственные колебания с определенным периодом. Чтобы избежать трудностей, связанных с трехмерным характером задачи, представим, следуя Эйри, простейшую модель системы в виде воды в широком канале постоянной глубины h , опоясывающем земной шар по экватору. Представим себе, что равновесие воды в таком канале каким-либо образом нарушено, скажем, уровень воды повысился в двух диаметрально противоположных точках канала и понизился посередине между ними, так что профиль поверхности воды имеет форму эллипса. Такое искажение профиля, описываемое формулой (7), возникло бы под действием статических приливообразующих сил. В сильно преувеличенном виде искаженная форма поверхности показана слева на рис. 6.

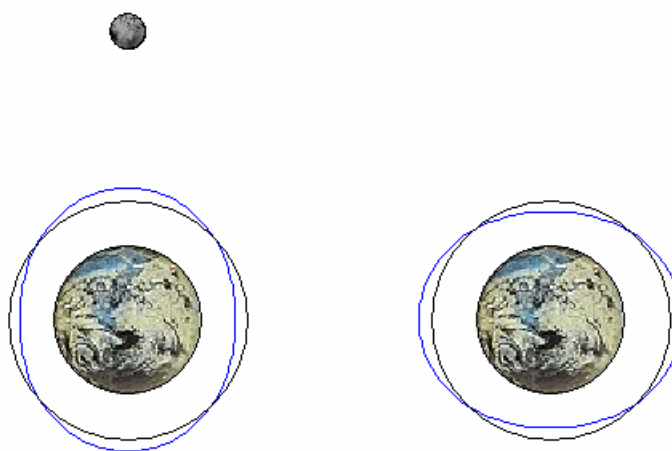


Рис. 6. Квадрупольные колебания уровня воды (стоячая волна) в канале, опоясывающем Землю по экватору (амплитуда стоячей волны сильно преувеличена).

Если «отключить» внешнее воздействие, вызвавшее искажение формы поверхности воды (т.е. «убрать» Луну), то под действием сил земного тяготения профиль будет стремиться восстановить равновесную круговую форму, так что вода из мест с повышенным уровнем устремится (в обе стороны) к местам с пониженным уровнем. В момент, когда восстановится круговая форма профиля, массы воды будут по инерции продолжать движение, и в результате возникнут «вспучивания» поверхности воды в тех местах, где был низкий уровень, и наоборот. Иначе говоря, вода в канале будет совершать колебания, при которых эллиптический профиль через четверть периода становится круговым, а еще через четверть периода снова принимает форму эллипса, вытянутого в направлении, ортогональном к первоначальному, как показано в правой части рис. 6. Затем все повторяется в обратном направлении.

Такую моду собственных колебаний воды в канале можно рассматривать как стоячую волну, длина которой (расстояние от одного максимума до другого) равна половине окружности земного шара. Суперпозиция двух стоячих волн, оси симметрии которых образуют одна с другой угол $\pi/4$, а фазы колебаний сдвинуты на четверть периода, дает бегущую (циркулирующую вдоль экватора) волну с двумя «горбами» в диаметрально противоположных точках.

Как известно из гидродинамики (см., например, [4]) в канале глубины h длинные волны (длина которых много больше глубины канала) распространяются со скоростью,

которую можно рассчитать по следующей формуле (g – ускорение свободного падения):

$$v = \sqrt{gh}. \quad (11)$$

С помощью этой формулы легко подсчитать время, в течение которого волна в канале obeжит вокруг Земли. Если положить $h = 3.5$ км, что примерно соответствует средней глубине воды в океане, получим 59 часов. Для приливной волны с двумя «горбами» собственный период T_0 вдвое меньше, т.е. составляет около 30 часов.

Вращающаяся система приливообразующих сил вызывает в опоясывающем земной шар канале такую же циркулирующую приливную волну с двумя одинаковыми «горбами» в диаметрально противоположных точках. Но период этой вынужденной волны, в отличие от рассмотренной выше собственной волны, совпадает с периодом T внешнего воздействия, т.е. составляет 12 часов для солнечных приливов и 12 ч. 25 мин. для лунных приливов. Этот период меньше периода собственной волны. Из теории колебаний известно, что в таких условиях установившиеся вынужденные колебания происходят почти в противоположной фазе с изменениями внешней силы, возбуждающей колебания.

Связь рассматриваемого вопроса о приливах с элементарной теорией вынужденных колебаний становится особенно ясной, если заменить вращающуюся систему приливных сил двумя осциллирующими, как обсуждалось выше. Каждая из этих вынуждающих сил независимо от другой порождает свое вынужденное колебание в виде соответствующей стоячей волны. Суперпозиция таких стоячих волн одинакового периода и одинаковой амплитуды, сдвинутых по фазе на четверть периода, и представляет собой вынужденную приливную волну, циркулирующую вокруг земного шара. Соответствующие математические соотношения можно найти в статье [1].

Вынужденное колебание происходит в одинаковой фазе с вынуждающей силой, если период возбуждения больше собственного периода осциллятора, и в противофазе в противном случае. Статическая теория качественно верно описывала бы приливы, если бы собственный период T_0 был меньше $T \approx 12$ часов, но для этого в рассматриваемой модели глубина канала h должна превышать 20 км. Характер искажения поверхности воды в циркулирующей приливной волне иллюстрирует рис. 7 (слева при $T_0 < T$, и справа при $T_0 > T$). Величина искажения на рисунке сильно преувеличена.

Таким образом, в рамках рассматриваемой упрощенной модели океана динамическая теория приливов предсказывает для соответствующего действительности случая $T_0 > T$ (собственный период больше полусуток) наступление отлива, когда Луна находится в верхней и нижней кульминациях, и наступление прилива, когда Луна находится в квадратуре (наблюдается из данного места на горизонте).

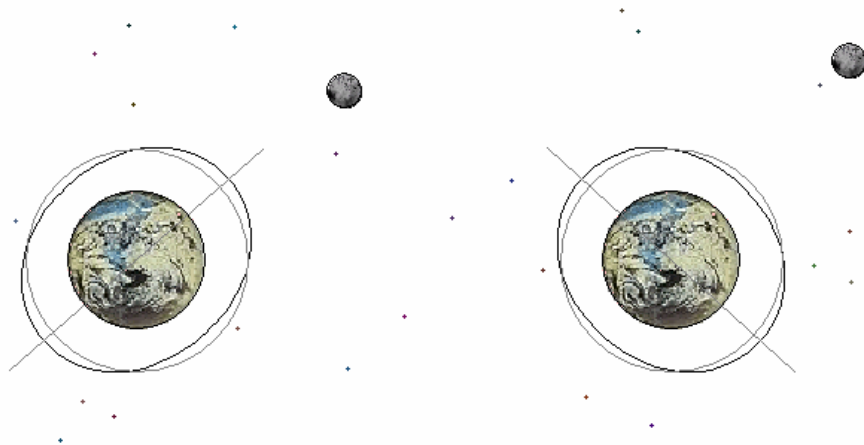


Рис. 7. Приливообразующее небесное тело и приливная волна при $T_0 < T$ (слева), и при $T_0 > T$ (справа).

Лунные и солнечные приливы накладываются друг на друга. Когда Солнце и Луна находятся на одной прямой с Землей (т.е. в полнолуние и новолуние), приливы получаются особенно сильными. Их называют *большими* или *сизигийными*. Когда Луна находится в первой и в последней четверти, лунные приливы ослабляются из-за наложения солнечных. В таких говорят о *малых*, или *квадратурных*, приливах. Амплитуда большого прилива может быть в 2.7 раза больше амплитуды малого прилива.

Как уже отмечалось, максимальная статическая разность уровней под действием лунных приливообразующих сил составляет 0.55 м, под действием солнечных – примерно 0.24 м. В соответствии с динамической теорией, амплитуды приливов (в модели экваториального канала) должны быть несколько больше. Для данного значения отношения вынуждающего и собственного периодов T/T_0 (далекого от 1, т.е. от резонансной ситуации) динамическая амплитуда отличается от статической деформации множителем

$$\frac{1}{1 - (T/T_0)^2}. \quad (12)$$

Для приведенных выше значений $T \approx 12$ ч. и $T_0 \approx 30$ ч. этот множитель равен примерно 1.2. Поэтому для амплитуды сизигийных приливов динамическая теория дает значение порядка 1 м, что довольно близко соответствует значениям, наблюдаемым на островах в открытом океане.

За рамками модели – сложности реальной картины

Картина приливных сил привязана к видимому с Земли положению приливообразующего небесного тела. В приведенном выше анализе предполагалось, что это тело находится над земным экватором. Но орбиты Луны и Солнца не лежат в плоскости экватора, поэтому их положения относительно Земли периодически изменяются, что создает так называемые *неравенства* величин приливов. Когда Луна или Солнце не находятся в экваториальной плоскости, возникает *суточное неравенство*, выражающееся в том, что амплитуды последовательных полусуточных приливов не равны. Это неравенство выражено тем сильнее, чем больше склонение светила и чем больше географическая широта места наблюдения. *Полумесячное неравенство* выражается в различии амплитуд во время сизигий и квадратур. *Параллактическое неравенство* возникает вследствие периодических изменений расстояния от Земли до Луны из-за эллиптичности лунной орбиты: приливообразующая сила в перигее примерно на 40% больше, чем в апогее. Неравенства с более длинными периодами происходят из-за изменений угла наклона лунной орбиты к плоскости земного экватора с периодом 18.6 года и из-за изменений эксцентриситета лунной орбиты с периодом 8.85 года. Имеются и другие неравенства с меньшими амплитудами.

На характере приливов сильно сказывается сложный рельеф дна океанов и морей, препятствия в виде материков и островов со сложными очертаниями береговых линий, морские течения, ветры и множество других трудно учитываемых факторов. Амплитуда прилива в океане вдали от побережья не превышает 1 м, но у берегов в зависимости от их очертаний и глубины моря приливы могут достигать значительной высоты. Особенно высокие приливы могут наблюдаться в узких проливах либо в глубине длинных заливов. Например, в заливе Фанди на атлантическом побережье Канады амплитуда сизигийных приливов нарастает от 4 м при входе до 12 – 18 м в глубине залива. На некоторых реках приливная волна значительной высоты может проникать из океана вверх по течению на большие расстояния. Такое явление называется *бором*. Например, на Амазонке приливная волна *поророка* высотой до 3 м распространяется на 300 км вверх по течению.

Эволюция движений небесных тел под действием приливного трения

Распространение приливной волны сопровождается рассеянием механической энергии. Этот эффект очень важен для понимания истории Земли и Луны. То, что Луна обращена к нам все время одной стороной, связано с имевшими место в далеком прошлом эффектами приливного трения на Луне. Приливное трение на Земле приводит к постепенному замедлению ее осевого вращения. Уменьшение момента импульса, связанного с вращением Земли вокруг оси, компенсируется возрастанием момента импульса орбитального движения Луны. Это означает, что орбита Луны постепенно расширяется. Измерения показывают, что в современную эпоху продолжительность суток возрастает на 0.0016 секунды в столетие, и среднее расстояние до Луны увеличивается примерно на 4 см в год. Конечным этапом такого замедления вращения Земли и эволюции орбиты Луны станет выравнивание периодов обращения Луны вокруг Земли и суточного вращения Земли. Другими словами, в конце концов из-за приливного трения произойдет полная синхронизация осевого вращения Земли с орбитальным движением Луны, и земные сутки сравняются с месяцем. Луна и Земля в своем орбитальном кружении вокруг центра масс системы будут все время обращены друг к другу одной стороной. На основе закона сохранения момента импульса можно подсчитать, что в конечном состоянии продолжительность как суток, так и месяца будет равна приблизительно 50 современным суткам.

Приливное трение ответственно за современное состояние осевого вращения некоторых планет и их спутников, а также за состояние вращения и орбитального движения тесных двойных звезд. Все крупные спутники (за исключением Гиперона – спутника Сатурна) и близкие малые спутники планет Солнечной системы вращаются вокруг своих осей синхронно с их орбитальным движением. Самая далекая планета Плутон и ее спутник Харон дают пример пары небесных тел в Солнечной системе, которые уже достигли конечного состояния полной синхронизации своего осевого вращения и взаимного обращения, когда дальнейшей эволюции под действием приливных сил не происходит. Важная роль приливного трения в космогонии впервые была отмечена английским астрономом Джорджем Дарвиным (сыном знаменитого естествоиспытателя Чарльза Дарвина).

Другим интересным примером проявления приливных сил может служить так называемый *предел Роша*, т.е. минимальное расстояние, на которое большой (естественный) спутник может приблизиться к своей планете – хозяину без того, чтобы приливные силы не разорвали его на части. Чтобы получить оценку этого критического расстояния R_c , можно приравнять приливную силу (2), приложенную к некоторой материальной точке массы m на поверхности спутника радиуса r_{sat} и массы m_{sat} со стороны планеты массы M , и силу собственного гравитационного притяжения этой материальной точки спутником:

$$2 \frac{GmM}{R_c^3} r_{\text{sat}} = \frac{Gm m_{\text{sat}}}{r_{\text{sat}}^2}, \quad (13)$$

откуда для предела Роша получаем следующее выражение:

$$R_c = r_{\text{sat}} \sqrt[3]{\frac{2M}{m_{\text{sat}}}} = r_{\text{planet}} \sqrt[3]{\frac{2\rho}{\rho_{\text{sat}}}}. \quad (14)$$

В этой формуле r_{planet} – радиус планеты – хозяина, ρ – ее средняя плотность, а ρ_{sat} – средняя плотность спутника. Если планета и спутник имеют сходный состав (т.е. $\rho \approx \rho_{\text{sat}}$), предел Роша равен приблизительно $2^{1/3} = 1.26$ радиуса планеты – хозяина. Знаменитые кольца Сатурна лежат внутри предела Роша и потому могут быть образованы осколками естественного спутника, разорванного приливными силами.

Литература

1. Eugene Butikov. *A Dynamical Picture of the Oceanic Tides*. American Journal of Physics, v. **70**, No 10 (October 2002) pp. 1001 – 1011. В электронном виде (pdf-версия) эта статья доступна также с персональной web-страницы автора по адресу www.ifmo.ru/butikov/Oceanic_Tides.pdf
2. Donald Simanek. *Misconceptions about tides*. Подробное изложение распространенных заблуждений о приливах. www.lhup.edu/~dsimanek/scenario/tides.htm
Mikolaj Sawicki. *Myths about Gravity and Tides*. The Physics Teacher, **37**, October 1999, pp. 438-441. A [pdf revised version](#) is available online. This article discusses a wide range of misconceptions about the tides.
3. Бутиков Е. И. *Океанские приливы*. Комплекс моделирующих программ (интерактивные Java-апплеты). См. в сети www.ifmo.ru/butikov/Projects/TidesR0.html
4. А.Г. Аленицын, Е.И. Бутиков, А.С. Кондратьев. Краткий физико-математический справочник. Москва, «Наука», 1990 (стр. 293).